# Design, Implementation and Control of a Rotary Inverted Pendulum

**Dr. O. OLABY**
Academic Staff in Fac. of Electrical
& Electronic Engineering
University of Aleppo

**Abstract**

The aim of this research is to built a control algorithm for our rotary inverted pendulum system that is designed and implanted. The inverted pendulum problem is one of the most important and favorite topics for control system enthusiasts. The rotary inverted pendulum consists of a rigid body rod (pendulum) rotating in a vertical plane. This inverted pendulum inherently unstable and must be actively balanced in order to remain upright. So, an advanced control algorithm is required to maintain proper and correct orientation. The mathematical model has be simulated using MATLAB/SIMULINK software with multi controllers that have been designed. The perfect designed controller will be chosen to control the new pendulum.. Based on the good results obtained in this research, the pendulum system manages to reach the upright position and to remain in the stability.

**Keywords:**
Rotary Inverted Pendulum, Poles Placement Controller, PID Controller, LQR Controller, Simulation by Matlab.

Received / / 2012
Accepted / / 2012

## I- المقدمة و أهمية البحث:

تنبع أهمية هذا البحث من إن مسألة النّواس المقلوب هي واحدة من أهم المواضيع للأشخاص المهتمين في دراسة أنظمة التحكّم، التي أصبحت تساهم بشكل كبير في عملية تطوير العديد من مجالات الهندسة. يمكن اعتبار النّواس المقلوب مثال عملي للأنظمة اللاخطيّة يسمح بتطبيق واختبار خوارزميات تحكّم متنوعة مثل متحكّمات الـ PID، الشبكات العصبونية، و التحكّم الضبابي [1]. وبالتالي يمكن اعتماد نظام النّواس كأداة تعليمية و توضيحية مهمة جداً، يمكن استثمارها في القسم العملي لمقررات هندسة التحكّم التي تدرس لطلاب الجامعة.

يمكن تصنيف نظام النّواس المقلوب وفق معيارين، الأول هو شكل حركة النّواس، حيث لدينا إما نواس انسحابي أو نواس دوراني. الإنسحابي عبارة عن عربة يتمركز عليها نواس بواسطة مفصل دبوسي، تعتبر قوة المحرك المطبقة على العربة هي دخل للنظام الذي يستجيب بإزاحة العربة خطياً و بالإزاحة الزاويّة لوصلة النّواس [3, 2]. بالنسبة للنواس الدوراني فإن أبسط أشكاله التي يمكن التحكّم بها، هو عبارة عن وصلة نواس مرتبطة مباشرتاً بمحور محرك [3]، ولكن هذا الشكل بسيط جداً وغير كافي لإيجاد تطبيق له أو استثماره. لذلك فإن أبسط نواس مقلوب يجب أن يمتلك درجتي حرية على الأقل، درجة حرية ناتجة عن تحرك موضع قاعدة النّواس والأخرى ناتجة عن تحرك زاوية وصلة النّواس [1]. في الحقيقة إنّ المعيار الثاني لتصنيف أنظمة النّواس المقلوب هو عدد درجات الحرية. من أجل تحقيق أنظمة نواس بدرجات حرية أعلى نقوم إما بزيادة عدد الوصلات، أو نسمح لكل وصلة موجودة بالتحرك في أكثر من مستوٍ وهذا يحتاج إلى مفصل كروي لتنفيذه. إن موازنة عصا على راحة الكف هو أحد الأمثلة لنواس مقلوب بدرجتي حرية. باعتبار أن مفصلي الكتف والمرفق هما مفصلي حركة.

كانت بداية التوجه لدراسة أنظمة النّواس المقلوب عند ظهور الحاجة لتصميم متحكّمات لموازنة الصواريخ في بداية إقلاعها العامودي أثناء عملية الإطلاق، حيث يكون الصاروخ في هذه الحالة غير مستقر بشكل كبير [4]. وبشكل مشابه يحتاج

النُواس المقلوب إلى آلية تصحيح مستمرة ليبقى ثابتاً في وضعه العلوي، باعتباره نظام غير مستقر في الحلقة المفتوحة.

يتم حالياً استثمار مبدأ عمل النُواس المقلوب في الكثير من التطبيقات، نذكر على سبيل المثال لعبة الموازنة في مدينة الملاهي [5]، حيث تتكون من ذراع مثبتة على محور شاقولي. إحدى نهايتي النُواس تحتوي عربة الركاب والنهاية الأخرى تكون غالباً مجهزة بثقل كبير معاكس. مبدأ اللعبة يعتمد على أرجحة النُواس ذهاباً وإياباً باستخدام مجموعة محركات DC تقوم بتحريك المحور. لدينا أيضاً الرافعات المستخدمة لتحميل وتفريغ حمولات كبيرة، أو من أجل تركيب معدّات ضخمة في المعامل. إنّ عملية نمذجة وتطوير متحكّمات لنظام النُواس المقلوب ستساهم كثيراً في عملية تحسين أداء هذه التطبيقات.

إنّ نظمنا المصمّم و المنفذ صغير الحجم بشكل كافٍ بحيث يمكن نقله من مكان لآخر، داخل أو خارج الجامعة. من الناحية الميكانيكية، يعتبر النظام المصمم صلباً بشكل كافي بحيث يسمح للطلاب بمحاولة موازنة النُواس يدوياً، الأمر الذي لا يمكن تحقيقه ولكن ذلك من شأنه أن يعطيهم فكرة واضحة عن قدرة المتحكّم في التغلب على صعوبة موازنة الذراع للأعلى.

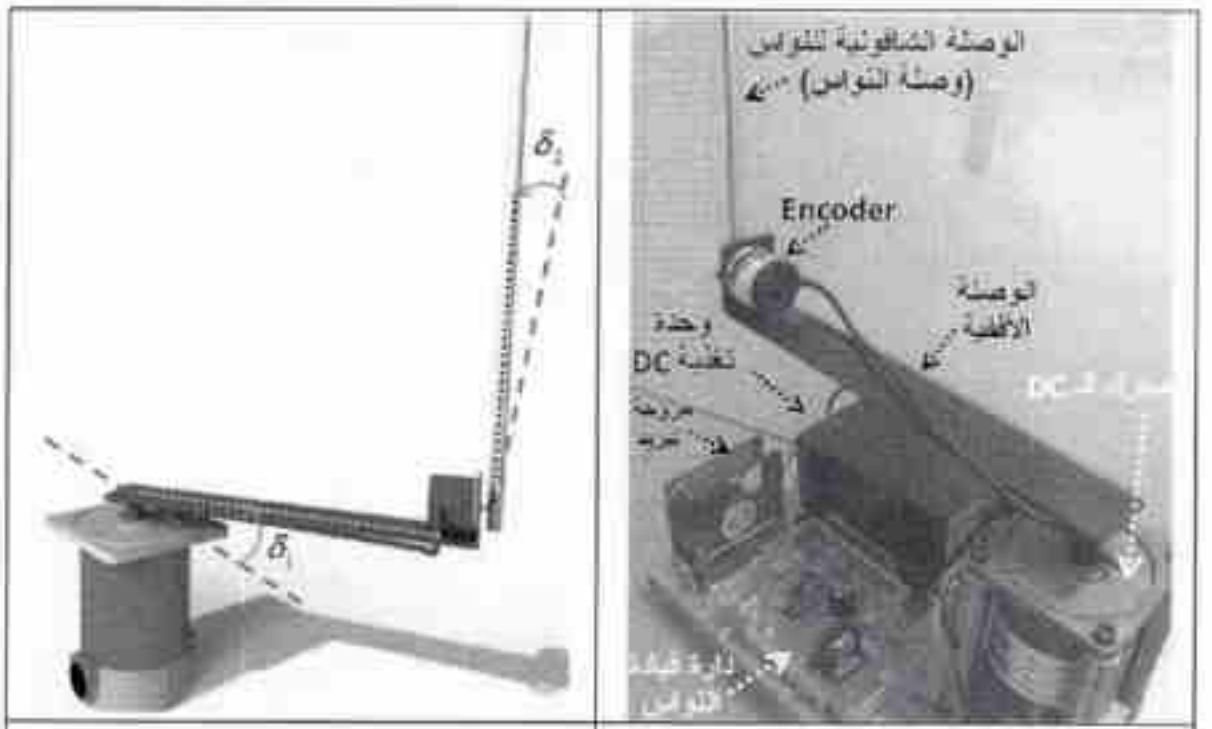
تم في هذا البحث ذكر مبادئ النُواس المقلوب الدوراني وتم اعتماد أفضل نموذج تحكّم ممكن لنظام النُواس المقلوب الذي تم تصميمه.

بعد أن تم عرض مقدمة نظرية عن مفهوم النُواس المقلوب و أشكاله، سنناقش في الفقرة الثانية الطريقة المتبعة في تنفيذ البحث والتي تعرض تصميم القسمين الفيزيائي "الميكانيكي" والإلكتروني للنظام، وتشرح كيفية نمذجة النُواس بجملة معادلات رياضية تعبّر عن سلوكه الديناميكي. ستعرض الفقرة الثالثة من هذا البحث كيفية تصميم ثلاث أنواع لمتحكّمات مختلفة (المتحكّم التناسبي التكاملي التفاضلي PID، المتحكّم الأمثلي ، متحكّم توضع الأقطاب). في حين ستقدم الفقرة الرابعة نتيجة محاكاة خوارزميات التحكّم الثلاث السابقة والمقارنة بينها. أمّا الفقرة الأخيرة فستلخّص العمل المنجز وتتطرق إلى الآفاق المستقبلية لهذا البحث.

## 2- طرائق البحث

يمكن توضيح منهجية البحث من خلال المخطط المبين في الشكل (1)، الذي يوضّح المراحل العامة للعمل، و سيتم الحديث عن تفاصيل كل مرحلة في الفقرات التالية. حيث انه بعد أن تم تنفيذ التصميم الميكانيكي للنوّاس تم اختيار العناصر الكهربائية للنظام كالـــEncoder والمحرّك ودارة قيادته الالكترونية التي تحتوي على الـــ Microcontroller، تم فيما بعد اعتماد نموذج رياضي للنظام بالكامل، الأمر الذي سمح بمحاكاة النظام قبل التطبيق العملي للأوامر التحكّم.

**الشكل(1): المخطط النهجي لطريقة البحث المتّبعة**




أ- صورة فوتوغرافية مع تسمية المكونات ب- مخطط مبسّط

الشكل(2): النّواس المقلوب الدوراني المصمم والمنفذ بقسميه الميكانيكي و الكهربائي/الكتروني.

## 2-1 تصميم القسم الميكانيكي:

يبين الشكل (2) تصميم نظام نواس مقلوب بوصلة نواس واحدة تتحرك في مستوٍ شاقولي معامد لوصلة ثانية أفقية موصولة مباشرتاً إلى محور محرّك، مما يعطيها حركة دورانية في مستوٍ أفقي. في بداية العمل قمنا بوضع متطلبات التصميم و التي نتج عنها بارامترات التصميم التالية:

- لكي تكون التجربة سهلة النقل يجب أن لا يزيد طولها عن متر واحد في وضع الإيقاف وبالتالي سيكون طولها أقل من مترين في حالة العمل.
- لكي تكون التجربة قوية الهيكل وخالية من الإحتكاك الستاتيكي والإرتداد والتمايل، يجب أن تكون قاعدة النظام ثقيلة بشكل كافٍ لتحمّل القوة الدافعة لوصلات النّواس التي قد تؤدي إلى اهتزاز النظام.
- لجعل ديناميكية النظام بطيئة بشكل كافي لتحقيق قابلية التحكّم، يجب أن تكون وصلة النّواس أطول ما يمكن.
- يجب استخدام مكونات ذات نوعية جيدة بحيث تكون ذات عمر اقتصادي طويل.

تم تصميم الوصلة الأفقية بطول (350mm) وسماكة (2mm) من الحديد وذلك من أجل تحمل وزن كل من الـEncoder و وصلة النّواس، وتجنب الانحناء. إن الوصلة الأفقية الموضّحة في الشكل (3) لها شكل مبسط تم تلحيمها من الأسفل مع محور يركب على محور المحرك ويثبت عليه بواسطة برغي، ولتثبيت الـEncoder على الطرف الأخر للوصلة تم حفر الوصلة من على مسافة (300mm) بزاوية 90° نحو الأعلى، و إحداث فتحة بنصف قطر (10mm).

**الشكل (3) وصلة النّواس الأفقية.**

يبين الشكل (4) وصلة النّواس الشاقولية، انها عبارة عن اسطوانة بطول (414mm) وقطر (10mm) من الألمنيوم بوزن خفيف (90g) ليسهل من توازنها. لتثبيت وصلة النّواس مع الوصلة الأفقية تم إيجاد فتحة عند نهاية وصلة النّواس تسمح بتثبيت محور الـEncoder فيها عن طريق برغي يمنع انزلاق وصلة النّواس أثناء عملية التوازن.

**الشكل (4) أبعاد وصلة النّواس الشاقولية (وصلة النّواس).**

**2-2 تصميم القسم الكهربائي:.**

إنّ النظام الإلكتروني المكون من الـ Encoder والمشغّل وتجهيزات معالجة الإشارة يجب أن يعمل بدرجة عالية من الدقة، كما و يجب توفير إمكانية الحصول على المعلومات بمستوى عالي.

لقد تم استخدام محرك تيار مستمر كمشغّل، باعتبار أن محركات التيار المستمر توفر إمكانية التحكّم بالسرعة بشكل مرن وديناميكي أكثر من محركات التيار المتناوب [6]، وهذا يعني إمكانية تغيير السرعة والعزم وحتى اتجاه دوران المحرك بحسب تغيرات الحمل ومتطلبات العمل وذلك بآليات سهلة وبسيطة. فيما يلي مواصفات المحرك المستخدم:

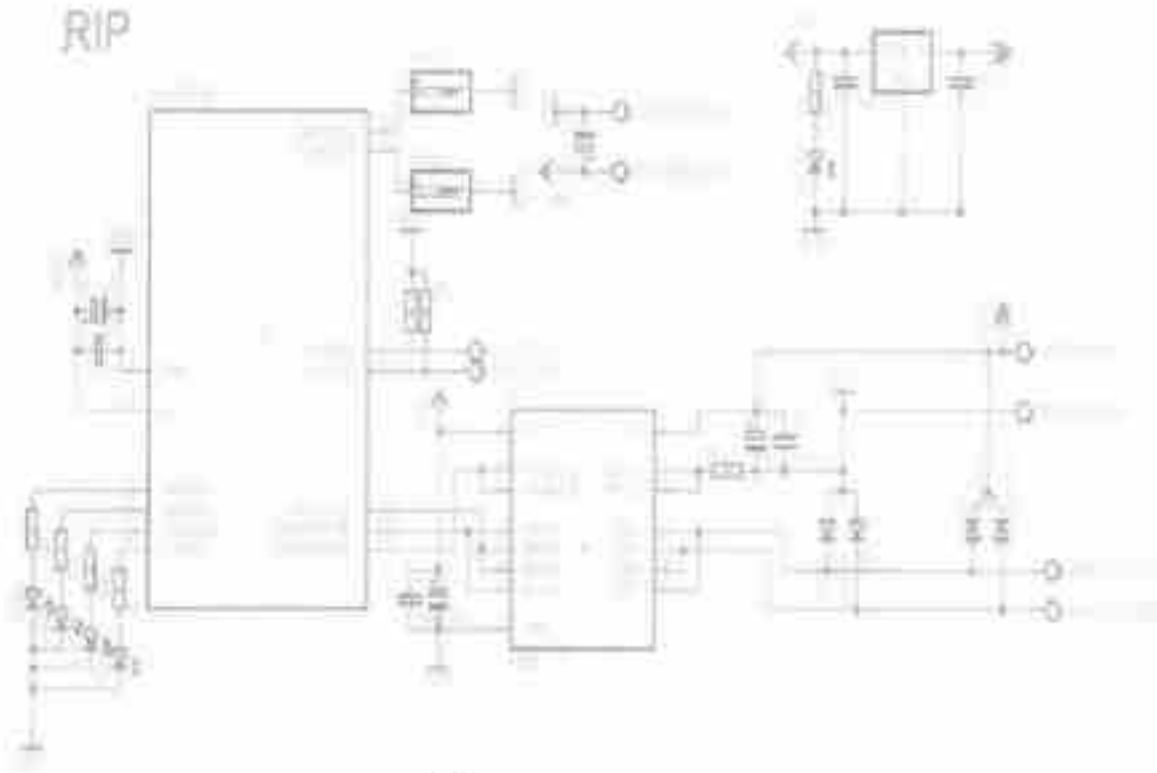
**جدول (1): مواصفات محرك الـ DC المستخدم**

| | |
|---|---|
| Maximum Continuous Torque | 12 N cm |
| Maximum Peak Torque | 22 N cm |
| Motor Voltage Constant | 12 V/4000 rpm |
| Motor Torque Constant | 9 N cm/A |
| Mechanical Time Constant | 17 ms |
| Rotor Inertial | 0.214 $kgcm^2$ |
| Rotor Resistance | 1.3Ω |
| Rotor Inductance | 5.0 Mh |

يبين الشكل (5) المخطط الالكتروني لدارة التحكّم بنظام التّواس المقلوب الدوراني. لقد استخدمنا في التصميم الالكتروني لقيادة محرك التيار المستمر الشريحة L298 [7]. إنّ تلك الدارة المتكاملة هي عبارة عن جسر H كامل مزدوج Dual full-bridge driver لأربعة ترانستورات استطاعتها تم تشغيلها معاً بحيث تعمل كمفاتيح لإشارة الـ PWM. تمتاز الشريحة L298 بأنها ذات تيار و جهد عاليين وهي مصممة لتحقيق المستويات المنطقية لمعايير الـ TTL.

استخدمنا كمعالج الشريحة ATMEGA8، التي هي عبارة عن متحكّم Microcontroller ذو 8-bit مصنع بتقنية CMOS ذات الطاقة المنخفضة، المبني على أساس بنية AVR بمزايا بنية معالجات الـRISC المحسّنة مع ذاكرة

برنامج ومبضيّة Flash قابلة لإعادة البرمجة [8]. إن المتحكّم ATMEGA8 ينجز تقريباً مليون تعليمة في الثانية 1MIPS عند تردد قدره 1MHz، مما يسمح لمصمم النظام باستهلاك الطاقة الأمثلية مقابل سرعة المعالجة. لقد صنعت هذه الشريحة باستخدام تقنية ذاكرات Atmel Memory الغير قابلة للزوال ذات الكثافة العالية. أن المتحكّم ATMEGA8 يتمتع بالقوة والمرونة العالية وبالكلفة المنخفضة للعديد من تطبيقات التحكّم المتطوّرة.



**الشكل (5) المخطط الالكتروني لدارة قيادة النّواس المقلوب الدوراني**

استخدمنا في تغذية النظام ككل وحدة تغذية DC تعطي جهد 12V وتيار 5A. المحرك يغذى مباشرة من هذا المنبع من خلال جسر من الترانستورات الاستطاعية، أما الـEncoder والمعالج المصغر فتغذى من خلال منظم جهد 5V. تم استخدام منظم الجهد 7805 لأن جهد تغذية المعالج المصغر و الـEncoder هو 5V.

**3-2 النّموذج الرياضي لنظام النّواس المقلوب الدوراني:**

تم اعتماد نموذج لنظام النّواس المقلوب الدوراني عبارة عن جملة معادلات رياضية، الأمر الذي سمح باستخدام برنامج Matlab/ Simulink لتقييم أداء النظام عبر ربطه بمتحكّمات مختلفة ثم تصميمها.

يبين الشكل (2-ب) مخطط بسيط لنظام النّواس المقلوب الدوراني الذي تم تصميمه. إنّ اتجاهات الأسهم في الشكل تحدد الاتجاه الموجب لزوايا الوصلتين الأفقية و الشاقولية للنظام انطلاقا من المحورين المرجعيين للإزاحة الأفقية والشاقولية. فمثلاً عندما تكون الوصلة الشاقولية في وضع التوازن السفلي عندها يكون متحول الموضع $\delta_1$ مساوياً للصفر.

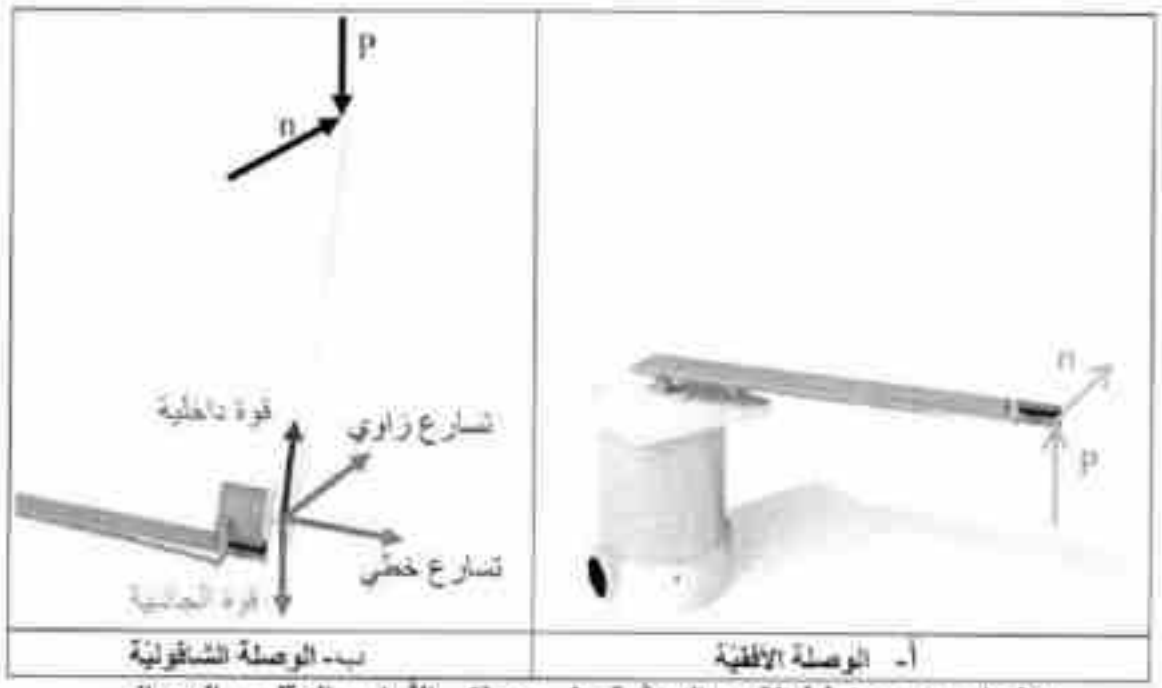
أن نظام المعادلات الديناميكية التي تصف النّواس المقلوب يمكن استنتاجها بتطبيق قانون نيوتن لحركة الجسم الحر، أو باستخدام طريقة أولر-لاغرنج [9]. وبالتالي يمكن استنتاج المعادلات التفاضلية الممثلة لنظام النّواس ككل عبر دراسة تأثير القوى على كل وصلة من وصلتي النّواس بشكل منفرد، عبر تطبيق قانون نيوتن للحركة، ومن ثم دمج المعادلتين معاً للحصول على النّموذج النهائي للنواس.

إن مجموع العزوم $M$ الذي تخضع لها أي وصلة قابلة للحركة حول مركز دوران يساوي إلى جداء العطالة $J$ بالتسارع الزاوي $\ddot{\delta}$ لتلك الوصلة وفق العلاقة: $M = J\ddot{\delta}$. وبالتالي من أجل الوصلة الأفقية للنواس (الشكل 5-أ) يكون لدينا المعادلة التالية (بفرض إنّ اتجاه العزم يكون موجب مع عكس اتجاه عقارب الساعة):

$$\tau - nL_1 - b_1\dot{\delta}_1 = J_1\ddot{\delta} \qquad (1)$$

حيث $n$ تعبّر عن القوة الأفقية التي تخضع لها الوصلة.

تعبّر $\tau$ عن عزم محرك التيار المستمر الذي يعتبر دخل لنظام النّواس.(انظر الجدول (2) من أجل مدلول باقي الرموز)




ب- الوصلة الشاقولية | أ- الوصلة الأفقية

**الشكل (5) : مخطط القوى المؤثرة على وصلتي الذّواس المقلوب الدوراني**

الآن بدراسة مخطط الجسم الحر لوصلة الذّواس الشاقولية (الشكل 5-ب) عبر تطبيق قانون نيوتن $F = ma$ . وبالتالي بجمع القوى في الاتجاه الأفقي كما يلي:

$$n = L_1\ddot{\delta}_1 m_2 + m_2 l_2 \ddot{\delta}_2 \cos\delta_2 - m_2 l_2 \dot{\delta}_2^2 \sin\delta_2 \qquad (2)$$

في حين انه بجمع القوى في الاتجاه العمودي لوصلة الذّواس نحصل على المعادلة:

$$n\cos\delta_2 - p\sin\delta_2 - m_2 g\sin\delta_2 = m_2 l_2\ddot{\delta}_2 + m_2 L_1\ddot{\delta}_1\cos\delta_2 \qquad (3)$$

حيث $p$ تعبّر عن القوة الشاقولية التي تخضع لها الوصلة.

الآن بتطبيق قانون العزوم على تلك الوصلة الشاقولية، ينتج مايلي:

$$J_2\ddot{\delta} = pl_2\sin\delta_2 - nl_2\cos\delta_2 - b_2\dot{\delta}_2 \qquad (4)$$

بضرب المعادلة (3) بـ $l_2$ ، و من ثمّ جمعها مع المعادلة (4) ينتج لدينا مايلي:

$$-m_2 l_2 g\sin\delta_2 - b_2\dot{\delta}_2 = m_2 l_2^2\ddot{\delta}_2 + m_2 l_2 L_1\ddot{\delta}_1\cos\delta_2 + J_2\ddot{\delta}_2$$

$$\ddot{\delta}_2\left(m_2 l_2^2 + J_2\right) = -m_2 l_2 g\sin\delta_2 - b_2\dot{\delta}_2 - m_2 l_2 L_1\ddot{\delta}_1\cos\delta_2 \qquad (5)$$

بتعويض المعادلة (2) في المعادلة (1) وبعد الاختصار نحصل على العلاقة التالية:

$$J_1\ddot{\delta}_1 = \tau - \left(L_1\ddot{\delta}_1 m_2 + m_2 l_2\ddot{\delta}_2\cos\delta_2 - m_2 l_2\dot{\delta}_2^2\sin\delta_2\right)L_1 - b_1\dot{\delta}_1$$

$$\ddot{\delta}_1\left(J_1 + L_1 m_2\right) = \tau - m_2 l_2\left(\ddot{\delta}_2\cos\delta_2 - \dot{\delta}_2^2\sin\delta_2\right)L_1 - b_1\dot{\delta}_1 \qquad (6)$$

تمثّل العلاقتين (5) و (6) معادلتين غير خطيتين، وهما النّموذج الرياضي لنظام النّواس المقلوب الدوراني الذي تم تصميمه (بدون محرك الـ DC)، والذي يمكن التعبير عنه في Matlab بصندوق تكتب بداخله المعادلات التفاضلية الغير خطية، خرج هذه المعادلات (الذي يمثل تسارع كل من الوصلة الأفقية والشاقولية للنواس) يكامل مرتين للحصول على السرعة والموضع (للوصلتين) اللتان تعودان بتغذية عكسية إلى المعادلات التفاضلية عن طريق مجمّع Multiplexer.

بالنسبة لمحرك التيار المستمر، و كما هو معروف فان نموذجه الرياضي ممكن أن يعطى كمايلي [10]:

$$\begin{aligned} U_f &= i_f R_f + L_f \frac{di_f}{dt} \\ U_a &= i_a R_{ac} + L_{ac} \frac{di_a}{dt} + k\phi\omega \\ M &= k\phi i_a \end{aligned} \qquad (7)$$

حيث أن $k = \phi / i_f$ يعبّر عن معامل يتوافق مع الجزء الخطّي من منحني مغنطة المحرك. من السهل تمثيل المعادلات (7) في بيئة المحاكاة Simulink ، كما سنوضح ذلك في الفقرة الثالثة من هذا البحث.

وهكذا تم بناء نموذج رياضي لنظام النّواس بشرط عدم وجود احتكاك ستاتيكي أو ارتداد أو تمايل. وجود هذه القوى التي تؤدي إلى عدم الخطيّة تجعل النمذجة الدقيقة والتحكّم بالنظام أكثر صعوبة [11].

## 3- محاكاة نظام النّواس المقلوب الدوراني بتطبيق متحكّمات متنوعة

بعد أن تم اعتماد نموذج رياضي لنظام النّواس المقلوب أصبح من الممكن بناء واختبار متحكّمات مناسبة للنظام وتحسين أدائها قبل التطبيق العملي لها. سنقوم بتصميم ثلاثة أنواع للمتحكّمات ومن ثم سنقارن بينها، نتائج المقارنة سيتم عرضها في الفقرة الرابعة من هذا البحث.

### 3-1 تطبيق متحكّم تناسبي-تكاملي-تفاضلي "PID"

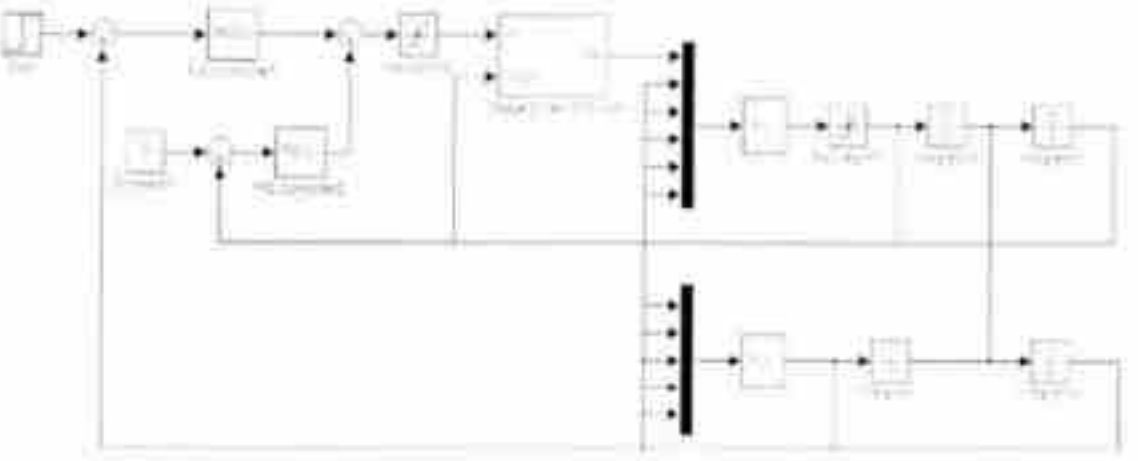
كما هو معروف فانّ متحكّم الـPID يتم تطبيقه على نظام خطّي [12]. باعتبار ان ديناميكية أنظمة النّواس المقلوب هي غير خطية (انظر إلى المعادلتين 5-6) فإننا قمنا بتقريب معادلات حركة النّواس إلى معادلات خطية حول نقطة توازنه الحرجة التي عندها ستكون ذراع النّواس للأعلى والسرعة الزاوية لتلك الذراع ستكون معدومة، هذا يعني انّه سيكون لدينا مايلي:

$$\delta_2 = \pi + \theta \Rightarrow \begin{Bmatrix} \sin\delta_2 = -\theta \\ \cos\delta_2 \approx -1 \end{Bmatrix} \qquad (8)$$
$$\dot{\delta}_2 = 0$$

بتعويض العلاقات (8) في معادلات الحركة للنواس (5-6) ممكن أن نحصل على نموذج خطي لنظام النّواس الدوراني المقلوب يمكن قيادته عن طريق متحكّم PID:

$$\begin{aligned} \ddot{\delta}_1\left(J_1 + L_1^2 m_2\right) &= \tau + m_2 l_2 L_1 \ddot{\delta}_2 - b_1\dot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2\left(m_2 l_2^2 + J_2\right) &= -m_2 l_2 g\left(\pi - \delta_2\right) - b_2\dot{\delta}_2 + m_2 l_2 L_1 \ddot{\delta}_1 \end{aligned} \qquad (9)$$

يبين الشكل (6) المخطط الصندوقي للنظام في بيئة Simulink، حيث تمت كتابة المعادلات التفاضلية الخطيّة للنظام وإضافة نموذج لمحرك الـ DC المستخدم، ومن أجل ضبط سرعة الوصلة الأفقية والحصول على أفضل استجابة أضفنا متحكّم PD للتحكّم بسرعة الوصلة الأفقية.



**الشكل (9): مخطط محاكاة عمل نظام النّواس المقلوب الدوراني بوجود متحكّم PID**

تمت معايرة بارامترات متحكّم الـ PID و الـ PD حتى حصلنا على استجابة خرج موافقة للاستجابة المرغوبة من أجل قيم الثوابت التالية: $k_p = 240 ; k_i = 30 ; k_d = 15$ لمتحكّم الـ PID و $k_p = 5 ; k_d = 3$ من أجل متحكّم الـ PD. وبالتالي فإن تابع الانتقال لمتحكّم الـ PID سيكون من الشكل:

$$G(s) = \frac{240s + 15s^2 + 30}{s} \qquad (10)$$

إنّ شكل استجابة خرج النظام في حال استخدام متحكّم الـ PID سيتم عرضها في الفقرة الرابعة من هذا البحث، عند مقارنتها مع استجابة النظام باستخدام متحكّمات من أنواع أخرى.

**3-2 تطبيق متحكّم أمثلي "LQR"**

إنّ استخدام المنظّم الخطّي التربيعي LQR كمتحكّم تغذية عكسية لنظام من شأنه أن يبدل نقطة عمل النظام ليلائم متطلبات التحكّم. حيث يؤمن الـ LQR قانون تحكّم أمثلي من أجل نظام خطي ذو تابع أداء تربيعي[13]. يتم تصميم هذا النوع من المتحكّمات عن طريق حل معادلة ريكاتي الجبرية، بناء على مصفوفة أوزان الحالة R و مصفوفة أوزان التحكّم Q والتي هي مصفوفات مربعة متجانسة دائماً.

انطلاقاً من النّموذج الخطي لنظام النّواس المقلوب الدوراني الممثل بالعلاقتين(9)، نكتب الشكل المصفوفي للنموذج كمايلي:

$$\begin{bmatrix} J_1 + L_1^2 m_2 & -m_2 l_2 L_1 \\ -m_2 l_2 L_1 & m_2 l_2^2 + J_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau - b_1 \dot{\delta}_1 \\ -b_2 \dot{\delta}_2 - m_2 l_2 g (\pi - \delta_2) \end{bmatrix} \qquad (11)$$

من العلاقة الأخيرة (11) يمكن عزل شعاع التسارع الزاوي لوصلتي النّواس، بضرب طرفيها من اليسار بمقلوب المصفوفة المربعة، فنحصل على شكل جديد لنموذج النّواس المدروس موصوفاً في فراغ الحالة كمايلي:

$$\begin{bmatrix} \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \\ \ddot{\delta}_1 \\ \ddot{\delta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & (m_2^2 l_2^2 L_1 g)/V_d & -b_1 (m_2 l_2^2 + J_2)/V_d & -b_2 m_2 l_2 L_1 / V_d \\ 0 & (J_1 + L_1^2 m_2) m_2 l_2 g / V_d & -m_2^2 l_2 L_1 b_1 / V_d & -b_2 (J_1 + L_1^2 m_2)/V_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \dot{\delta}_1 \\ \dot{\delta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (m_2 l_2^2 + J_2)/V_d \\ m_2 l_2 L_1 / V_d \end{bmatrix} \tau \qquad (12)$$

حيث أن القيمة $V_2=\left[(J_1+L_1^2m_2)(m_2l_2^2+J_2)-(m_2l_2L_1)^2\right]$ تعبّر عن قيمة محدد المصفوفة المربعة $(2\times2)$ في العلاقة (11) والمضروبة بشعاع التسارع الزاوي لوصلتي النّواس. لحساب الربح الأمثلي، لدينا معادلة ريكاتي:

$$PA+A^TP+Q-PBR^{-1}B^TP=0 \qquad (13)$$

حيث A و B تعبران عن مصفوفتي الحالة لنموذج النّواس المبين في العلاقة (12). بفرض أن المصفوفتين Q و R تم اختيارهما بحسب متحولات الحالة الأهم التي نريد أن نتحكّم بها [13]، وبحيث تساويان إلى:

$$R=[1]\ ,\ Q=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0.1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

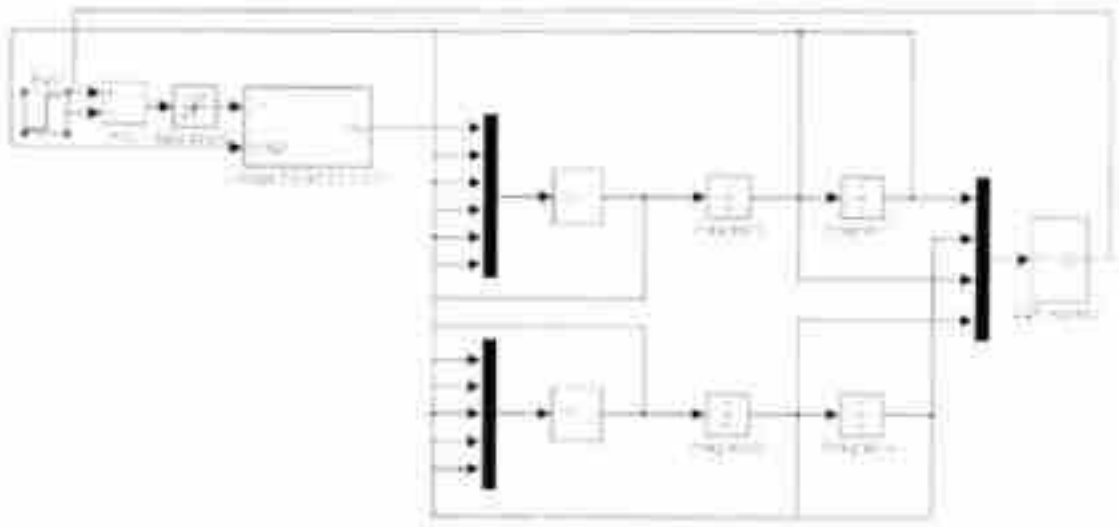
وبالتالي وباعتبار أنّ نظام النّواس المقلوب هو من الدرجة الرابعة فان شكل المصفوفة $P$ بعد حسابها من معادلة ريكاتي يكون كما يلي:

$$P=\begin{bmatrix}1.4581&-4.1031&0.5631&-0.8150\\-4.1031&42.0495&-5.1613&7.8509\\0.5631&-5.1613&0.6945&-1.0149\\-0.8150&7.8509&-1.0149&1.5533\end{bmatrix}$$

وأخيراً نحسب ربح المتحكّم الأمثلي من العلاقة $K=R^{-1}B^TP$، باستخدام تعليمة ماتلاب LQR، فنحصل على شعاع الربح التالي:

$$K=[-1\quad 19.3995\quad -1.4582\quad 4.0723]$$

شعاع الربح هذا تم استخدامه لرسم المخطط الصندوقي لنظام النّواس المقلوب الدوراني في بيئة Matlab/Simulink، كما هو واضح في الشكل (7). إنّ شكل استجابة خرج النظام في حال استخدام متحكّم الـ LQR سيتم عرضها في فقرة النتائج عند مقارنتها مع استجابة النظام باستخدام متحكّمات من أنواع أخرى.



**الشكل (7): مخطط محاكاة عمل نظام النّواس المقلوب الدوراني بوجود متحكّم LQR**

### 3-3 تطبيق متحكّم توضع أقطاب Pole placement

يعتبر متحكّم توضع الأقطاب من أبسط أنواع المتحكّمات القادرة على قيادة نظام موصوف بفراغ الحالة [14]. يعتمد متحكّم توضع الأقطاب على إزاحة القطب الابتدائي من يمين المحور العقدي إلى يساره، وذلك لأجل استقرار النظام و تحسين بارامترات استجابته. حيث كما هو معروف فانّ مكان توضع أقطاب الحلقة المغلقة يؤثر مباشرة على خصائص الاستجابة الزمنية العابرة مثل زمن الصعود وزمن الاستقرار. يمكن اعتبار متحكّم توضع الأقطاب كأنّه نظام فرعي لنظام النّواس المقلوب الدوراني سيساهم في توليد إشارة دخل مناسبة للنظام المنمذج اعتمادا على متحولات الحالة. بالنسبة لنظامنا الذي هو قيد الدراسة فانّ متحول الحالة المطلوب التحكّم به هو درجة انحراف الوصلة الشاقولية للنواس المقلوب الدوراني $\delta_2$ (انظر الشكل(2-ب)). سيتم تقدير بارامترات إضافية للنظام $\delta_1, \dot{\delta}_1, \dot{\delta}_2$ في تصميم المتحكّم بغية التحكّم بتوضّع جميع أقطاب الحلقة المغلقة، باعتبار أن النظام من الدرجة الرابعة.

بفرض أن رمز أمر التحكّم الذي سيخضع له نظام النّواس « و بتعويض قيم ثوابت النظام المدروس في نموذج فراغ الحالة لنظام النّواس المقلوب الموصوف بالمعادلة (12) نحصل على نموذج فراغ الحالة للنظام كمايلي:

$$\begin{bmatrix}\dot{\delta}_1\\ \dot{\delta}_2\\ \ddot{\delta}_1\\ \ddot{\delta}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 4.7484 & -0.0037 & -0.0075\\ 0 & 27.0833 & -0.0027 & -0.0430\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \dot{\delta}_1\\ \dot{\delta}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 37.1870\\ 26.9182\end{bmatrix}u \qquad (14)$$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \dot{\delta}_1\\ \dot{\delta}_2\end{bmatrix}$$

وهكذا فان خوارزمية تصميم متحكّم توضع الأقطاب لنظام النّواس المقلوب تؤول إلى إيجاد شعاع ربح المتحكّم ذو العلاقة:

$$K=\begin{bmatrix}\lambda_1-a_1 & \lambda_2-a_2 & \lambda_3-a_3 & \lambda_4-a_4\end{bmatrix}*T^{-1} \qquad (15)$$

حيث ان:

- $a_1, a_2, a_3$ تمثل معاملات المعادلة المميزة للنظام المدروس في الحلقة المفتوحة بدون متحكّم $|sI-A|=s^4+a_1s^3+a_2s^2+a_3s+a_4=0$.
- $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ تمثل معاملات المعادلة المميزة المرغوبة للنظام المدروس في الحلقة المغلقة بوجود متحكّم توضّع الأقطاب.
- T مصفوفة تحويل الأقطاب سيتم الحديث عنها في الخطوة الثانية من الخوارزمية.

- بداية سيتم اختبار قابلية التحكّم للنظام، حيث في حال عدم القابلية فان تصميم متحكّم توضع أقطاب لن يكون ممكناً عملياً. إن محدد المصفوفة $M=\begin{bmatrix}B & AB & A^2B & A^3B\end{bmatrix}$ يساوي إلى $|M|=-5.6026\times10^4$ (غير معدوم)، الأمر الذي يعني ان نظام النّواس الموصوف بنموذج المعادلة (14) قابل للتحكّم.
- ثانياً، تعطى مصفوفة تحويل الأقطاب بالعلاقة: $T=MW$، حيث انه ومن أجل نظامنا:

$$W=\begin{bmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ a_2 & a_1 & 1 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.0879 & -27.0831 & 0.0467 & 1 \\ -27.0831 & 0.0467 & 1 & 0 \\ 0.0467 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

حيث تم إيجاد كثير الحدود المميز للنظام المفتوح من النموذج (14):

$$|sI - A| = s^4 + 0.0467s^3 - 27.0831s^2 - 0.0879s$$

بالتالي تصبح المصفوفة T من الشكل:

$$T=\begin{bmatrix} -879.3268 & 1.3958 & 37.1870 & 0 \\ 0 & 0 & 26.9182 & 0 \\ 0 & -879.3268 & 1.3958 & 37.1870 \\ 0 & 0 & 0 & 26.9182 \end{bmatrix}$$

- الآن يجب أن نختار أقطاب الحلقة المغلقة المرغوب بها. باختيار القيم المرغوبة لكلٍ من التردد الطبيعي ومعامل التخامد كما يلي: $\omega_n = 2.7250$ و $\zeta = 0.3170$، فان تابع الانتقال المرغوب لنظام النّواس في وصلة التغذية العكسية سيكون من الشكل:

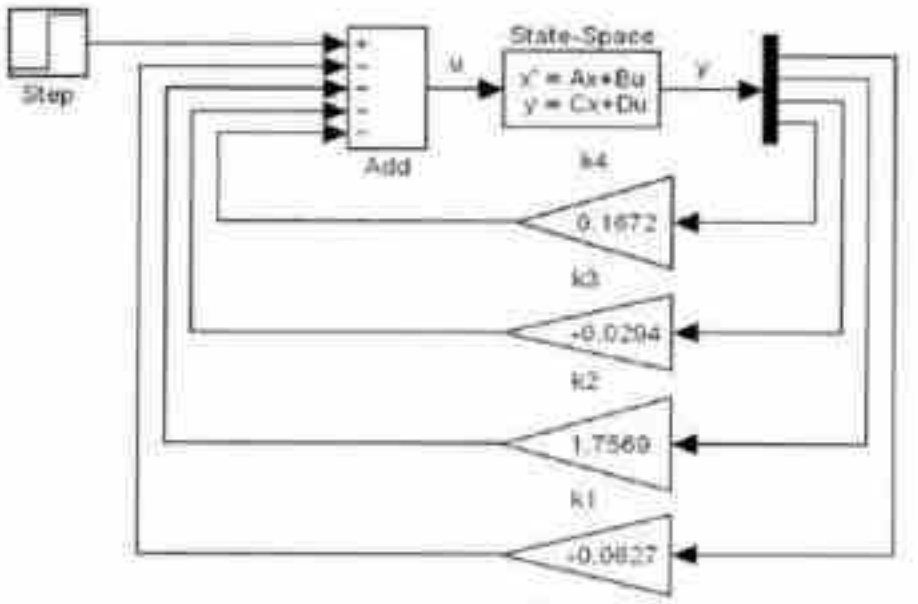
$$G(s)=\frac{\omega_n^4}{s^4+4\zeta\omega_n s^3+(4\zeta^2\omega_n^2+2\omega_n^2)s^2+4\zeta\omega_n^3 s+\omega_n^4} \qquad (16)$$

$$=\frac{55.1424}{s^4+3.4552s^3+17.8362s^2+25.6576s+55.1424}$$

من مقام تابع الانتقال المذكور في العلاقة (16) نجد ان جميع اقطاب النظام المغلق واقعة في منطقة الاستقرار. ما يهمنا في تصميم متحكّمنا هو كثير الحدود المميز للعلاقة (16)، و الذي منه نجد ان المعاملات التي نحتاجها في علاقة ربح المتحكّم (15)، هي كما يلي:

$$\lambda_1 = 3.4552\ ,\ \lambda_2 = 17.8362\ ,\ \lambda_3 = 25.6576\ ,\ \lambda_4 = 55.1424$$

بالتعويض في العلاقة (15) فان مصفوفة التغذية العكسية (متحكّم توضع الأقطاب) تحدد من العلاقة: $K = [-0.0627 \quad 1.7569 \quad -0.0294 \quad 0.1672]$




**الشكل (8): مخطط محاكاة عمل نظام النّواس المقلوب الدوراني بوجود متحكّم توضع الأقطاب.**

وهو ما يظهر في الشكل (8) الذي يعبّر عن محاكاة لنظام النّواس المقلوب الدوراني بوجود متحكّم توضع الأقطاب.

**4- المقارنة و النتائج**

سنستعرض في هذه الفقرة نتائج إجراء محاكاة في بيئة Matlab/Simulink لعمل نظام النّواس المقلوب الذي تم تصميمه وتنفيذ قسميه الميكانيكي والالكتروني. نتيجة تطبيق خوارزميات التحكّم الثلاث (متحكّم الـ PID، المتحكّم الأمثلي LQR، متحكّم توضع الأقطاب) التي تم استعراض تصميمها في الفقرة السابقة، قمنا بعمل مقارنة بين منحنيات الاستجابة لكلٍ من الإزاحة و السرعة الزاويّة للوصلة الأفقية و الشاقوليّة لنظام النّواس المقلوب الدوراني، كما هو مبين في الشكل (9). نتيجة المقارنة وصلنا إلى أنّ زاوية النّواس $\delta_2$ (زاوية الوصلة الشاقوليّة للنواس) تستقر عند القيمة صفر (القيمة المرغوبة) في حال استخدام الأنواع الثلاث للمتحكّمات (المذكورة في الفقرة الثالثة من هذه الورقة)، ولكن:

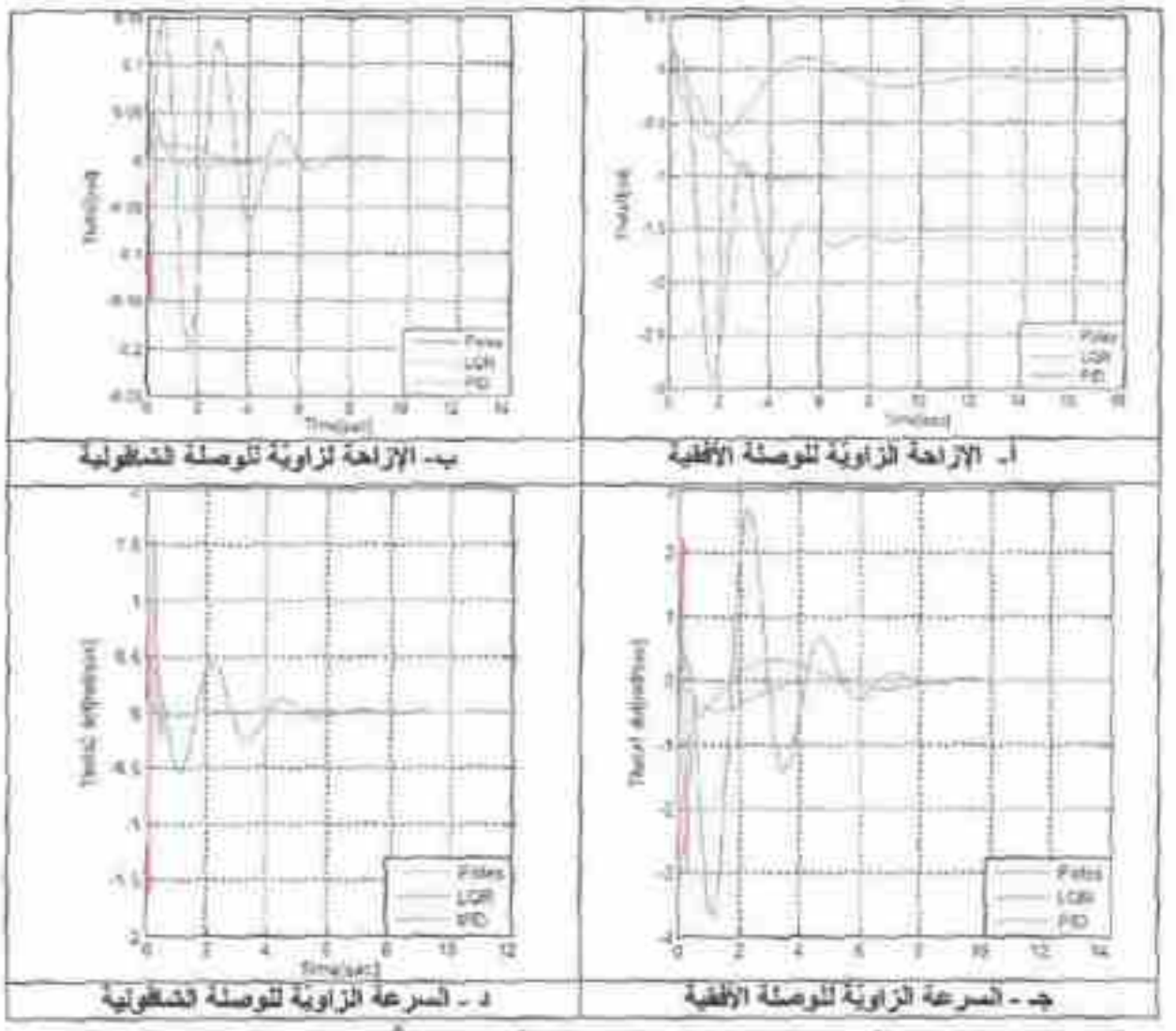
- عند استخدام متحكّم أمثلي LQR نحصل على أفضل استجابة، حيث ان نسبة تجاوز الهدف لم تزيد عن 2.5%، وان زمن الاستقرار لم يزد عن 5sec.

- عند استخدام متحكّم PID نحصل على استجابة ذات نسبة تجاوز للهدف تساوي إلى 4%، و زمن استقرار 6.2sec
- عند وجود متحكّم توضع الأقطاب نحصل استجابة تتسم بنسبة تجاوز للهدف تساوي إلى 15%، وزمن استقرار 8.5sec

نلاحظ من المنحنيات على الشكل(9) ان المتحكّم الأمثلي LQR يعطينا أفضل استجابة حيث هو الأسرع استقراراً بأقل إهتزازات. حيث ومن الشكل (9-أ) نجد ان الإزاحة الزاوية للوصلة الافقية (نتيجة دوران محرك الـــDC) مع متحكّم الـــ LQR هي الأسرع والأنعم استقرارا مقارنة مع منحني الإزاحة عند تطبيق المتحكّمين الباقيين. ان النتيجة نفسها حصلنا عليها عندما رسمنا تغيرات السرعة الزاوية للوصلة الأفقية و الشاقولية للنظام في الشكلين (12- جـــ) و (12- د)، ما يؤكد أنّ المتحكّم الامثلي المصمم هو الأنسب والأفضل لنظامنا المصمم. لكن من الناحية التطبيقية يعتبر المتحكّم الأمثلي الأصعب تطبيقاً في متحكّمات الـــ AVR (الأكثر وفرة في السوق) باعتبارها لا تدعم مثل هذا النوع من الخوارزميات. الأمر الذي منعنا من تطبيق المتحكّم الأمثلي، على أمل أن نستخدم متحكّمات أسرع من نوع الـــ DSP في المرحلة الثانية لبحثنا.

أن متحكّم توضع الأقطاب يعتبر سهل التطبيق ولكنه ذو استجابة بطيئة نسبياً (انظر الشكل(9))، وبالتالي فانه قد لا يعطي نتائج مرضية أثناء التشغيل ولذلك تم استبعاده في عملية تنفيذ المتحكّم للنظام الحقيقي.

كما وجدنا خلال المحاكاة فانّ متحكّم الـــ PID يعطي استجابة سريعة نسبياً، و باهتزازات مقبولة. إنّ أهم ميزة لهذا المتحكّم هو سهولة التطبيق و المعايرة، كما يمكن تنفيذه في متحكّمات الـــ AVR. الأمر الذي جعلنا (حالياً) نستخدمه في عملية تنفيذ المتحكّم للنظام الحقيقي. في الحقيقة لقد تم التنفيذ ونجح النظام المصمّم بنسبة تفوق الـــ 70% في موازنة الوصلة الشاقولية للأعلى بالرغم من تزايد الاهتزازات (مقارنة مع نتائج المحاكاة) قبل الاستقرار الشاقولي للأعلى.




أ- الإزاحة الزاوية للوصلة الأفقية

ب- الإزاحة لزاوية للوصلة الشاقولية

جـ - السرعة الزاوية للوصلة الافقية

د - السرعة الزاوية للوصلة الشاقولية

**الشكل (٩): مقارنة بين تغيرات متحولات الحالة لنظام النّواس المقلوب الدوراني في مرحلة المحاكاة، من أجل ثلاثة أنواع لخوارزميات تحكّم.**

**٥- الخلاصة وآفاق التطوير المستقبليّة:**

تم في هذا البحث تصميم و تنفيذ نظام نواس مقلوب دوراني بأقسامه الميكانيكية والالكترونية، وبناء خوارزمية التحكّم به. كما تم اعتماد نموذج رياضي للنظام بجميع أقسامه، فحصلنا على نموذج تابع الانتقال و نموذج فراغ الحالة للنواس. قمنا فيما بعد ببناء و تصميم ثلاثة أنواع لمتحكّمات قادرة على قيادة نظام النّواس المقلوب وتحسين أدائه. نتيجة محاكاة عمل النّواس في بيئة Matlab/Simulink والمقارنة بين النتائج التي حصلنا عليها، توصلنا إلى أنّ متحكّم الـ LQR الأمثلي يعطينا أفضل استجابة مقـارنة مع متحـكّم الـ PID ومتحـكّم

توضع الأقطاب، حيث كان الـ LQR الأسرع استقراراً و بأقل إهتزازات. تم التأكد من هذه النتيجة برسم تغيرات كل من الإزاحة و السرعة الزاويّة للوصلة الأفقية و الشاقوليّة لنظام النّواس المقلوب الدوراني.

ان نجاح تنفيذ و قيادة نظام النّواس المقلوب الدوراني يجعله أداة تعليمية و توضيحية مهمة جداً، يمكن استثمارها في القسم العملي لمقررات التحكّم التي تدرس لطلاب الهندسة في الجامعة. حيث إن توفّر المخطط الصندوقي للنظام بجانب النظام الحقيقي سيرد على الكثير من تساؤلات الطلاب.

إن نظام النّواس المقلوب المنفذ في هذا البحث يمكن تطويره لكي يتضمن عدة وصلات أو حتى وصلات قابلة لتغيير طولها. كما يمكن تطوير متحكّم "swing up" قادر على رفع ذراع النّواس من وضعيتها الشاقولية في الأسفل إلى الأعلى و يوازنها. بمعنى أخر تصميم متحكّم يعطي النظام القدرة على العمل في نقطة التوازن دون ضبط يدوي، الأمر الذي يضيف المزيد من المتعة للمشاهدين ويزيد المزيد من تعقيد العمل بالنسبة للمصممين. لقيام بذلك فانه يجب استخدام أحدث المعالجات التي تسمح بتطبيق نظريات تحكّم أكثر تعقيداً، كالتحكّم الأمثلي والتحكّم التكيفي حيث يستطيع هذا الأخير ضبط ثوابته آلياً بدلاً من معايرتها يدوياً، ويستطيع التكيّف مع المشاكل الناجمة عن الاضطرابات و الضجيج.

جدول (2): قائمة البارامترات و الرموز المستخدمة

| الرمز | مدلول الرموز | القيمة العددية | الواحدة |
|---|---|---|---|
| $\delta_1$ | زاوية الوصلة الأفقية في المستوي الأفقي | | rad |
| $\dot{\delta}_1$ | السرعة الزاوية للوصلة الأفقية في المستوي الأفقي | | rad/s |
| $\ddot{\delta}_1$ | التسارع الزاوي للوصلة الأفقية | | rad/s$^2$ |
| $\delta_2$ | زاوية وصلة النّواس في المستوي الشاقولي | | rad |
| $\dot{\delta}_2$ | السرعة الزاوية لوصلة النّواس في المستوي الشاقولي | | rad/s |
| $\ddot{\delta}_2$ | التسارع الزاوي لوصلة النّواس | | rad/s$^2$ |
| $J_1$ | عطالة الوصلة الأفقية عند مركز ثقلها | 2.48E-02 | kgm$^2$ |
| $J_2$ | عطالة الوصلة الشاقولية عند مركز ثقلها | 3.86E-03 | kgm$^2$ |
| $l_2$ | المسافة بين مركز دوران وصلة النّواس الشاقولية ومركز ثقلها | 0.20 | m |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $m_1$ | كتلة وصلة الذراع الأفقية | 0.19 | kg |
| $m_2$ | كتلة وصلة الذراع الشاقولية | 0.09 | kg |
| $L_1$ | طول الوصلة الأفقية | 0.30 | m |
| $L_2$ | طول وصلة الذراع الشاقولية | 0.414 | m |
| $g$ | تسارع الجاذبية الأرضية | 9.81 | $m.s^{-2}$ |
| $b_1$ | معامل التخميد اللزج عند مركز دوران الوصلة الأفقية | 0.0001 | Nms |
| $b_2$ | معامل التخميد اللزج عند مركز دوران الوصلة الشاقولية | 0.00028 | Nms |

## Reference


[1] Ireneusz D., 2011, **Fuzzy Logic Control of Rotational Inverted Pendulum, Solid State Phenomena,** Vol. (177), pp 84-92.

[2] Franklin G.F., Powell J.D., Emami-Naeini A., 2002, **Feedback Control Of Dynamic Systems,** New Jersey: Prentice Hall.

[3] Dorf R.C., Bishop R.H., 1998, **Modern Control Systems,** 8th edition, Addison Wesley Longman.

[4] Atmaja, B.K.; Joelianto, E., 2011, **Surface control design of rocket using MIMO PID robust integral backstepping,** 2nd International Conference on Instrumentation Control and Automation (ICA), Page(s): 162 – 169.

[5] http://www.hilifuncity.ae/en/attractions/funny-traffic.aspx

[6] Chee-Mun Ong, **Dynamic simulation of electric machinery: using MATLAB/SIMULINK**, Prentice Hall PTR, 1998.

[7] http://www.sparkfun.com/datasheets/Robotics/L298_H_Bridge.pdf

[8] http://www.atmel.com/products/microcontrollers/avr/default.aspx

[9] W Zhong, **Energy and Passivity Based Control of the Double Inverted Pendulum**, Proc. of 2001 IEEE International Conference on Control Applications & International Symposium on Intelligent Control, Mexico City, Mexico, pp. 896-901, September 5-7, 2001

[10] http://www.library.cmu.edu/ctms/ctms/simulink/examples/motor2/motor2s.htm

[11] Cazzolato B., Prime Z., 2011, **On the Dynamics of the Furuta Pendulum**, Journal of Control Science and Engineering, Vol., 8 p.

[12] C.-L. Smith, 2009, **Practical Process Control-Tuning and Troubleshooting**, John Wiley & Sons, 431 p.

[13] FAIZUL C., SALLEH B., 2008. **Linear quadratic regulator (LQR) speed control for DC motor**, Master Thesis, Malaysia Pahang Univertsity press,.

[14] S.-M. Tripath, 2008, **Modern Control Systems - An Introduction,** Infinity Science Press LLC.

# تصميم وتنفيذ نظام نواس مقلوب دوراني و التحكّم به

**الدكتور أسامة علبي**
مدرّس في قسم هندسة التحكّم والأتمتة
كلية الهندسة الكهربائية والإلكترونية، جامعة حلب

## الملخص

يهدف هذا البحث إلى بناء منظومة لنظام نواس مقلوب دوراني تم تصميمه و تنفيذه بشكل حقيقي. إن نظام النّواس المقلوب الدوراني يتكوّن من وصلة أفقية (ذراع) مرتكزة على محرّك يقوم بتدويرها، وفي نهايتها ذراع أخرى صلبة تشبه العصا (النّواس) تدور بحرية في مستوٍ معامد للوصلة الأولى. إن نظام النّواس هو نظام غير مستقر وغير خطّي بشكل كبير. يجب أن يُقاد النّواس بخوارزمية تحكّم وبشكل دائم من أجل إبقائه في وضع توازنه الشاقولي للأعلى، لذلك نحتاج إلى تعديل مستمر في وضعية النّواس للمحافظة على التوجيه الصحيح والمطلوب له. لقد تمّت محاكاة النّموذج الرياضي للنواس باستخدام برنامج Matlab/Simulink بتصميم عدة متحكّمات والمقارنة بينها لاختيار المتحكّم الأفضل. بناءً على النتائج التي توصلنا إليها في هذا البحث استطعنا إبقاء نظام النّواس المدروس في وضع توازنه الشاقولي للأعلى والمحافظة على استقراره.

**الكلمات المفتاحيّة:**

نظام نوّاس مقلوب دوراني، متحكّم PID، متحكّم أمثلي LQR، متحكّم توضّع الأقطاب، المحاكاة في Matlab/Simulink.

ورد هذا البحث للنشر في المجلة بتاريخ ـ / /2012

قابل للنشر بتاريخ ـ / /2012